Quantificateurs

Exercice 1

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide du quantificateur universel. On utilisera des notations mathématiques précises.

1. Tout nombre réel est supérieur ou égal à lui-même.
2. Le carré de tout nombre entier naturel est un nombre entier naturel.
3. Tout nombre réel strictement positif a un inverse strictement positif.
4. Le double de tout nombre entier naturel est un nombre pair.
5. Le produit de deux entiers strictement positifs est strictement positif.

Exercice 2

Traduire chaque phrase mathématique suivante en français courant.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n \in 2\mathbb{N}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n^2$

Exercice 3

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide du quantificateur existentiel. On utilisera des notations mathématiques précises.

1. Il existe un nombre réel dont le carré vaut 9.
2. Il existe un entier naturel impair.
3. Il existe un réel strictement négatif.
4. Il existe un nombre entier divisible par 7.
5. Il existe un réel dont la racine carré vaut 9.

Exercice 4

Traduire chaque phrase mathématique suivante en français courant.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ n \notin 2\mathbb{N}$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} = 9$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0$

Exercice 5

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

1. Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x + y = 0$.
2. Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel k tel que $k > n$.
3. Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x - y = 2$.
4. Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $m = 2n$.
5. Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $xy = 1$.

Exercice 6

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide des quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$. On utilisera une écriture mathématique rigoureuse.

1. Il existe un unique réel x tel que $x + 1 = 0$.
2. Il existe un réel qui est son propre carré.
3. Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 = x$.
4. Il existe un unique réel x tel que $x^2 = 0$.
5. Il existe un unique réel α tel que pour tout réel x, $\alpha x = 0$.

Propositions

Exercice 7

Traduire chacune des phrases suivantes par une implication logique.

1. Si un nombre est pair, alors son carré est pair.
2. Si $x > 0$, alors $x^2 > 0$.
3. Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 3.
4. Si deux droites sont parallèles, alors elles ne se coupent pas.

Exercice 8

Pour chaque implication ci-dessous, rédiger sa réciproque et indiquer, sans justification, si elle est vraie ou fausse.

1. $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
2. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
3. $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ est isocèle en A
4. n est divisible par 4 $\Rightarrow n$ est pair
5. Un triangle est équilatéral $\Rightarrow$ il est isocèle

Exercice 9

Pour chaque implication de l'exercice précédent, rédiger sa contraposée et indiquer, sans justification, si elle est vraie ou fausse.

Exercice 10

On considère l'énoncé suivant :
« Si un nombre est divisible par 4, alors il est pair »

1. Traduire cet énoncé à l'aide d'une implication mathématique.
2. Cette implication est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
3. Écrire la **réciproque** de cette implication en français, puis en notation mathématique.
4. La réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
5. Écrire la **contraposée** de cette implication en français, puis en notation mathématique.
6. La contraposée est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Exercice 11

Traduire chacune des équivalences ci-dessous en notation mathématique.

1. Un entier est pair si, et seulement si, il est divisible par 2.
2. Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire vaut 0.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Exercice 12

Pour chaque phrase suivante, identifier sil sagit dune implication ($\Rightarrow$) ou dune équivalence ($\Leftrightarrow$), puis la traduire en écriture mathématique.

1. Si un nombre est divisible par 10, alors il est divisible par 2.
2. Un triangle est rectangle si, et seulement si, il vérifie le théorème de Pythagore.
3. Si un entier est pair, alors son carré est pair.
4. Si un nombre est strictement négatif, alors son carré est strictement positif.
5. Un entier est impair si, et seulement si, il nest pas divisible par 2.

Exercice 13

Traduire chaque phrase mathématique suivante en français courant.

1. $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$
2. $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ est isocèle en A
3. $x \in \mathbb{R},\ x \in 2\mathbb{N} \Rightarrow x^2 \in 2\mathbb{N}$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x = -x$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exercice 14

Pour chaque phrase suivante, identifier le type de relation (implication ou équivalence), repérer les quantificateurs, puis traduire lénoncé en notation mathématique.

1. Pour tout réel x, si $x > 0$, alors $x^2 > 0$.
2. Un réel x est nul si, et seulement si, son opposé est égal à lui-même.
3. Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$.
4. Pour tout entier naturel n, si n est divisible par 6, alors n est divisible par 3.
5. Pour tout réel x, x est supérieur à son opposé si, et seulement si, x est strictement positif.
6. Pour tout réel x, si $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x}$ existe.
7. Pour tout réel x, si $x < 0$, alors $\sqrt{x}$ nest pas défini dans $\mathbb{R}$.