Quantificateurs

Exercice 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \frac{1}{x} > 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, 2n \in 2\mathbb{N}$
5. $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, ab > 0$

Exercice 2

1. Pour tout nombre réel, son carré est supérieur ou égal à zéro.
2. Pour tout entier naturel, le double est un nombre pair.
3. Pour tout nombre réel, la valeur absolue est positive ou nulle.
4. Pour tous réels a et b, leur somme est la même quel que soit lordre : $a + b = b + a$.
5. Pour tout entier naturel, il est inférieur ou égal à son carré.

Exercice 3

1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 9$
2. $\exists n \in \mathbb{N}, n \notin 2\mathbb{N}$ (ou $\exists n \in \mathbb{N}, n \in 2\mathbb{N} + 1$)
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$
4. $\exists n \in \mathbb{Z}, 7|n$ (ou $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 7k$)
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = 9$

Exercice 4

1. Il existe un nombre réel dont le carré est égal à 4.
2. Il existe un entier naturel impair.
3. Il existe un nombre réel strictement négatif.
4. Il existe un nombre réel dont la racine carrée est égale à 9.
5. Il existe un nombre réel dont la somme avec 1 vaut 0.

Exercice 5

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k > n$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y = 2$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m = 2n$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$

Exercice 6

1. $\exists ! x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
4. $\exists ! x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$
5. $\exists ! \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha x = 0$

Propositions

Exercice 7

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \in 2\mathbb{N}) \Rightarrow (n^2 \in 2\mathbb{N})$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, (6|n) \Rightarrow (3|n)$
4. $(d_1 \parallel d_2) \Rightarrow (d_1 \cap d_2 = \varnothing)$

Exercice 8

1. Réciproque : $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ - **FAUSSE** (car $x = -5$ aussi)
2. Réciproque : $(x = 2$ ou $x = -2) \Rightarrow x^2 = 4$ - **VRAIE**
3. Réciproque : $\triangle ABC$ isocèle en $A \Rightarrow AB = AC$ - **VRAIE**
4. Réciproque : n pair $\Rightarrow$ n divisible par 4 - **FAUSSE** (ex : $n = 6$)
5. Réciproque : Un triangle isocèle $\Rightarrow$ il est équilatéral - **FAUSSE**

Exercice 9

1. Contraposée : $x^2 \neq 25 \Rightarrow x \neq 5$ - **VRAIE**
2. Contraposée : $x \neq 2$ et $x \neq -2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ - **VRAIE**
3. Contraposée : $\triangle ABC$ non isocèle en $A \Rightarrow AB \neq AC$ - **VRAIE**
4. Contraposée : n impair $\Rightarrow$ n non divisible par 4 - **VRAIE**
5. Contraposée : Un triangle non isocèle $\Rightarrow$ il n'est pas équilatéral - **VRAIE**

Exercice 10

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, (4|n) \Rightarrow (2|n)$
2. Cette implication est **VRAIE**. Si n est divisible par 4, alors $n = 4k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Donc $n = 2(2k)$, ce qui montre que n est divisible par 2.
3. Réciproque (français) : Si un nombre est pair, alors il est divisible par 4.

   Réciproque (mathématique) : $\forall n \in \mathbb{Z}, (2|n) \Rightarrow (4|n)$
4. La réciproque est **FAUSSE**. Contre-exemple : $n = 6$ est pair mais n'est pas divisible par 4.
5. Contraposée (français) : Si un nombre n'est pas pair, alors il n'est pas divisible par 4.

   Contraposée (mathématique) : $\forall n \in \mathbb{Z}, \neg(2|n) \Rightarrow \neg(4|n)$

6. La contraposée est **VRAIE** (elle est équivalente à l'implication directe).

Exercice 11

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \in 2\mathbb{N}) \Leftrightarrow (2|n)$
2. $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$
3. $(\exists k \in \mathbb{Z}, \vec{u} = k \times \vec{v}) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0)$

Exercice 12

1. **Implication** : $\forall n \in \mathbb{Z}, (10|n) \Rightarrow (2|n)$
2. **Équivalence** : $\forall \triangle ABC, (\triangle ABC$ rectangle$) \Leftrightarrow$ (théorème de Pythagore vérifié)
3. **Implication** : $\forall n \in \mathbb{Z}, (n$ pair$) \Rightarrow (n^2$ pair$)$
4. **Implication** : $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$
5. **Équivalence** : $\forall n \in \mathbb{Z}, (n$ impair$) \Leftrightarrow \neg(2|n)$

Exercice 13

1. Si un nombre est strictement supérieur à 3, alors son carré est strictement supérieur à 9.
2. Si deux segments AB et AC ont la même longueur, alors le triangle ABC est isocèle en A.
3. Si un nombre réel est pair, alors son carré est pair.
4. Pour tout réel, il est nul si et seulement si il est égal à son opposé.
5. Un entier naturel est pair si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
6. Pour tout réel, sa valeur absolue est nulle si et seulement si il est nul.

Exercice 14

1. **Implication** avec quantificateur $\forall$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$
2. **Équivalence** avec quantificateur $\forall$ implicite : $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0) \Leftrightarrow (-x = x)$
3. **Existence** avec quantificateur $\exists$: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$
4. **Implication** avec quantificateur $\forall$: $\forall n \in \mathbb{N}, (6|n) \Rightarrow (3|n)$
5. **Équivalence** avec quantificateur $\forall$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x > -x) \Leftrightarrow (x > 0)$
6. **Implication** avec quantificateur $\forall$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0) \Rightarrow (\frac{1}{x} \in \mathbb{R})$
7. **Implication** avec quantificateur $\forall$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 0) \Rightarrow (\sqrt{x} \notin \mathbb{R})$